FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
Insititut für Mathematik II
Christian Haase
Andreas Paffenholz

GITTERPOLYTOPE
Wintersemester 2005/2006

1. AUFGABENBLATT

31. OKTOBER 2005

AUFGABE 1.

Die *Minkowskisumme* $A + B$ zweier konvexer Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ ist durch

$$A + B := \{(a + b) \in \mathbb{R}^d \mid a \in A,\ \ b \in B\}$$

definiert.

Seien $\sigma_1, \sigma_2 \subset \mathbb{R}^{d+1}$ zwei Kegel ($P_1, P_2 \subset \mathbb{R}^d$ zwei Polytope). Zeige, dass $\sigma_1 + \sigma_2$ ($P_1 + P_2$) wieder ein Kegel (Polytop) ist.

AUFGABE 2.

Sei σ ein Kegel mit Seiten τ_1 und τ_2. Zeige:

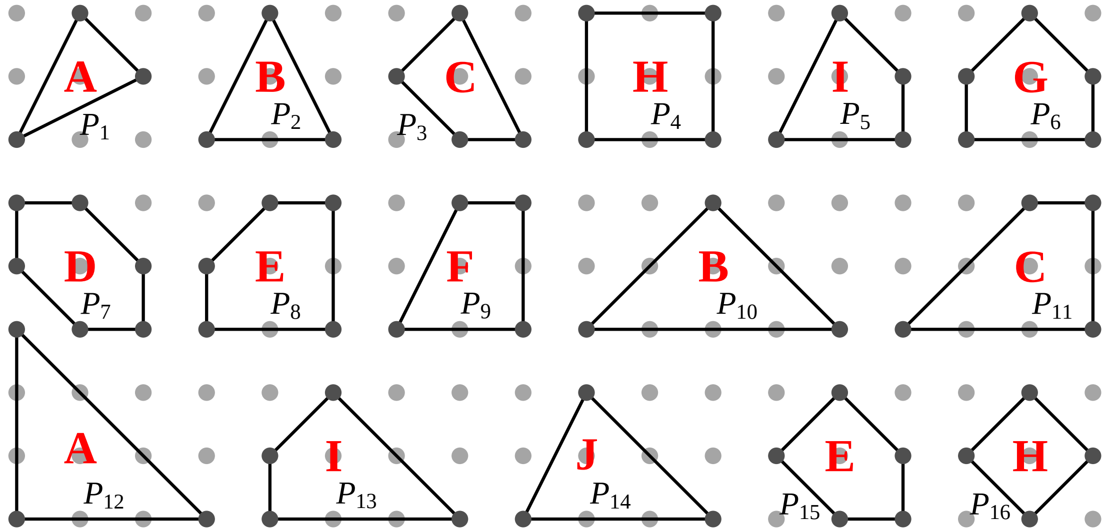
(1) τ_1 und τ_2 sind Kegel.
(2) $\tau_1 \cap \tau_2$ ist eine Seite von σ.
(3) Jede Seite von τ_1 ist auch eine Seite von σ.
(4) Jede Seite von σ ist in einer Facette von σ enthalten.
(5) Wenn σ einen linearen Unterraum enthält, dann ist dieser Unterraum in jeder Seite von σ enthalten.

AUFGABE 3.

Ein Gitterpolytop P heißt *reflexiv*, wenn das zugehörige duale Polytop ebenfalls ein Gitterpolytop ist.

Zwei Polygone P und Q im $\mathbb{R}^2$ heißen *unimodular äquivalent*, wenn es eine unimodulare Transformation $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt, so daß $\varphi(P) = Q$ ist.

(1) Gib ein Besipiel dafür, dass nicht alle Gitterpolygone reflexiv sind.
(2) Zeige, dass alle Polygone auf der umseitigen Abbildung reflexiv sind.
(3) Bestimme, welche der 16 Polygone Paare (P_i, P_j) bilden, so daß P_j bis auf eine unimodulare Transformation dual zu P_i ist.


A P_1
B P_2
C P_3
H P_4
I P_5
G P_6
D P_7
E P_8
F P_9
B P_{10}
C P_{11}
A P_{12}
I P_{13}
J P_{14}
E P_{15}
H P_{16}