**FREIE UNIVERSITÄT BERLIN**
*Insititut für Mathematik II*
Christian Haase
Andreas Paffenholz

GITTERPOLYTOPE
*Wintersemester 2005/2006*

# 2. AUFGABENBLATT

## 7. NOVEMBER 2005

### AUFGABE 1.

Sei $\Delta_d$ der $d$-dimensionale Simplex, $C_d$ der $d$-dimensionale Würfel und $Cr_d$ das $d$-dimensionale Kreuzpolytop, also

$$\begin{aligned} \Delta_d &:= \operatorname{conv}(e_i \in \mathbb{R}^{d+1}, i = 1, \ldots, d+1) \\ C_d &:= \operatorname{conv}(v \in \{+1, -1\}^d) \\ Cr_d &:= \operatorname{conv}(\pm e_i \in \mathbb{R}^d, i = 1, \ldots, d) \end{aligned}$$

Wieviele $k$-Seiten haben $\Delta_d$, $C_d$ und $Cr_d$ für $0 \leq k \leq d$?

### AUFGABE 2.

(1) Sei $\sigma := \operatorname{cone}(w_0, w_1) \subset \mathbb{R}^2$ ein zweidimensionaler spitzer Kegel. Zeige, daß es eine unimodulare Transformation $U$ gibt, die $\sigma$ in einen Kegel $\sigma'$ abbildet, der von den beiden Vektoren $v_0 := (0, 1)$ und $v_1 := (p, q)$ mit $0 \leq p < q$ aufgespannt wird.

(2) Wir wollen zeigen, daß es Gitterpolygone $Q$ gibt, die nicht als konvexe Hülle der inneren Gitterpunkte eines anderen Gitterpolygons auftreten können. Sei dafür $P$ ein Gitterpolygon und $P^{(1)}$, also die konvexe Hülle der inneren Gitterpunkte von $P$, sei zweidimensional.

   (a) Sei $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ mit $a_1, a_2, b \in \mathbb{Z}$ und $\operatorname{ggT}(a_1, a_2) = 1$ eine facettendefinierende Ungleichung von $P^{(1)}$. Zeige, daß $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b + 1$ eine gültige Ungleichung für $P$ ist.

   (b) Sei $v$ eine Ecke von $P^{(1)}$. Dann ist der von $P^{(1)} - v$ erzeugte Kegel unimodular äquivalent zu einem Kegel, der von den Vektoren $(1, 0)$ und $(p, p + 1)$ erzeugt wird.

   (c) Gib ein Beispiel eines Polygons $Q$, dass nicht als $P^{(1)}$ eines Gitterpolygons $P$ auftreten kann.

## AUFGABE 3.

Sei $\sigma = \text{cone}(v_1, \ldots, v_k)$ ein Kegel in $\mathbb{R}^d$ und $\tau$ eine Seite von $\sigma$. Zeige:

- $\tau^* := \sigma^\vee \cap \tau^\perp$ definiert eine Seite von $\sigma^\vee$.
- Die Abbildung $\tau \mapsto \tau^*$ ist eine inklusionsumkehrende Bijektion zwischen den Seiten von $\sigma$ und denen von $\sigma^\vee$.
- Für alle Seiten $\tau$ von $\sigma$ gilt $\dim(\tau) + \dim(\tau^*) = d$.

## ZUSATZAUFGABE

Sei $(L, <)$ eine Halbordnung. $L$ heißt *beschränkt*, wenn es ein eindeutige Elemente $\hat{1}$ und $\hat{0}$ gibt mit $\hat{1} > x$ und $\hat{0} < x$ für alle $x \in L \setminus \{\hat{1}, \hat{0}\}$.1

$L$ ist ein *Verband*, wenn $L$ eine Halbordnung ist, die zusätzlich die Eigenschaft hat, daß es für je zwei Elemente $x, y \in L$ ein eindeutiges minimales Element $z$ (den *join* $x \vee y$) mit $x \leq z$ und $y \leq z$ und ein eindeutiges maximales Element $z'$ (den *meet* $x \wedge y$) mit $x \geq z'$ und $y \geq z'$ gibt.

Wenn $L$ beschränkt ist, dann reicht es, entweder die Existenz von Meets oder die von Joins zu verlangen (wieso?).

Das Intervall zwischen $x, y \in L$ ist die Menge $[x, y] := \{z \in L \mid x \leq z \leq y\}$. Ein Element $y \in L$ *überdeckt* ein Element $x \in L$, wenn $x < y$ gilt und es kein $z \in L$ mit $x < z < y$ gibt.

Ein beschränter Verband heißt *gradiert*, wenn es eine Abbildung $\rho : L \to \mathbb{Z}$ gibt mit $\rho(\emptyset) = -1$ und $\rho(x) = \rho(y) - 1$ wenn $x$ von $y$ überdeckt wird. $\rho$ heißt *Rangfunktion*, und $\rho(x)$ ist der *Rang* des Elementes $x \in L$.

Ein beschränkter gradierter Verband heißt *Eulersch*, wenn jedes Intervall die gleiche Anzahl von Elementen ungeraden und geraden Rangs hat.

Sei $P$ ein Polytop mit Facetten $f_1, \ldots, f_m$ und Ecken $v_1, \ldots, v_n$.

Der *Seitenverband* $L(P)$ von $P$ ist die Menge aller Seiten von $P$ mit der Halbordnung

$$\tau < \sigma \quad :\Longleftrightarrow \quad \tau \text{ ist echte Seite von } \sigma.$$

$L(P)$ ist endlich, beschränkt, gradiert und Eulersch (wieso?).

Die Ecken-Facetten-Inzidenzmatrix ist eine Matrix $M = (m_{ij})$ mit Einträgen

$$m_{ij} := \begin{cases} 1 & v_i \text{ liegt in } f_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(1) Zeige, daß sich der Seitenverband aus der Ecken-Facetten-Inzidenzmatrix rekonstruieren läßt.
(2) Kann man die Dimension von $P$ bestimmen?
(3) Finde einen Zusammenhang zwischen dem Seitenverband (der Inzidenzmatrix) von $P$ und dem Seitenverband (der Inzidenzmatrix) von $P^\vee$.