FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
Insititut für Mathematik II
Christian Haase
Andreas Paffenholz

GITTERPOLYTOPE
Wintersemester 2005/2006

2. AUFGABENBLATT

7. NOVEMBER 2005

AUFGABE 1.

Sei Δ_d der d-dimensionale Simplex, C_d der d-dimensionale Würfel und Cr_d das d-dimensionale Kreuzpolytop, also

$$\begin{aligned} \Delta_d &:= \operatorname{conv}(e_i \in \mathbb{R}^{d+1}, i = 1, \ldots, d+1) \\ C_d &:= \operatorname{conv}(v \in \{+1, -1\}^d) \\ Cr_d &:= \operatorname{conv}(\pm e_i \in \mathbb{R}^d, i = 1, \ldots, d) \end{aligned}$$

Wieviele k-Seiten haben Δ_d, C_d und Cr_d für $0 \leq k \leq d$?

AUFGABE 2.

(1) Sei $\sigma := \operatorname{cone}(w_0, w_1) \subset \mathbb{R}^2$ ein zweidimensionaler spitzer Kegel. Zeige, daß es eine unimodulare Transformation U gibt, die σ in einen Kegel σ' abbildet, der von den beiden Vektoren $v_0 := (0, 1)$ und $v_1 := (p, q)$ mit $0 \leq p < q$ aufgespannt wird.

(2) Wir wollen zeigen, daß es Gitterpolygone Q gibt, die nicht als konvexe Hülle der inneren Gitterpunkte eines anderen Gitterpolygons auftreten können. Sei dafür P ein Gitterpolygon und $P^{(1)}$, also die konvexe Hülle der inneren Gitterpunkte von P, sei zweidimensional.

  (a) Sei $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ mit $a_1, a_2, b \in \mathbb{Z}$ und $\operatorname{ggT}(a_1, a_2) = 1$ eine facettendefinierende Ungleichung von $P^{(1)}$. Zeige, daß $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b + 1$ eine gültige Ungleichung für P ist.

  (b) Sei v eine Ecke von $P^{(1)}$. Dann ist der von $P^{(1)} - v$ erzeugte Kegel unimodular äquivalent zu einem Kegel, der von den Vektoren $(1, 0)$ und $(p, p + 1)$ erzeugt wird.

  (c) Gib ein Beispiel eines Polygons Q, dass nicht als $P^{(1)}$ eines Gitterpolygons P auftreten kann.

Aufgabe 3.

Sei $\sigma = \text{cone}(v_1, \ldots, v_k)$ ein Kegel in $\mathbb{R}^d$ und τ eine Seite von σ. Zeige:

- $\tau^* := \sigma^\vee \cap \tau^\perp$ definiert eine Seite von $\sigma^\vee$.
- Die Abbildung $\tau \mapsto \tau^*$ ist eine inklusionsumkehrende Bijektion zwischen den Seiten von σ und denen von $\sigma^\vee$.
- Für alle Seiten τ von σ gilt $\dim(\tau) + \dim(\tau^*) = d$.

Zusatzaufgabe

Sei $(L, <)$ eine Halbordnung. L heißt *beschränkt*, wenn es ein eindeutige Elemente $\hat{1}$ und $\hat{0}$ gibt mit $\hat{1} > x$ und $\hat{0} < x$ für alle $x \in L \setminus \{\hat{1}, \hat{0}\}$.1

L ist ein *Verband*, wenn L eine Halbordnung ist, die zusätzlich die Eigenschaft hat, daß es für je zwei Elemente $x, y \in L$ ein eindeutiges minimales Element z (den *join* $x \vee y$) mit $x \leq z$ und $y \leq z$ und ein eindeutiges maximales Element z' (den *meet* $x \wedge y$) mit $x \geq z'$ und $y \geq z'$ gibt.

Wenn L beschränkt ist, dann reicht es, entweder die Existenz von Meets oder die von Joins zu verlangen (wieso?).

Das Intervall zwischen $x, y \in L$ ist die Menge $[x, y] := \{z \in L \mid x \leq z \leq y\}$. Ein Element $y \in L$ *überdeckt* ein Element $x \in L$, wenn $x < y$ gilt und es kein $z \in L$ mit $x < z < y$ gibt.

Ein beschränter Verband heißt *gradiert*, wenn es eine Abbildung $\rho : L \to \mathbb{Z}$ gibt mit $\rho(\emptyset) = -1$ und $\rho(x) = \rho(y) - 1$ wenn x von y überdeckt wird. ρ heißt *Rangfunktion*, und $\rho(x)$ ist der *Rang* des Elementes $x \in L$.

Ein beschränkter gradierter Verband heißt *Eulersch*, wenn jedes Intervall die gleiche Anzahl von Elementen ungeraden und geraden Rangs hat.

Sei P ein Polytop mit Facetten $f_1, \ldots, f_m$ und Ecken $v_1, \ldots, v_n$.

Der *Seitenverband* $L(P)$ von P ist die Menge aller Seiten von P mit der Halbordnung

$$\tau < \sigma \quad :\Longleftrightarrow \quad \tau \text{ ist echte Seite von } \sigma.$$

$L(P)$ ist endlich, beschränkt, gradiert und Eulersch (wieso?).

Die Ecken-Facetten-Inzidenzmatrix ist eine Matrix $M = (m_{ij})$ mit Einträgen

$$m_{ij} := \begin{cases} 1 & v_i \text{ liegt in } f_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(1) Zeige, daß sich der Seitenverband aus der Ecken-Facetten-Inzidenzmatrix rekonstruieren läßt.
(2) Kann man die Dimension von P bestimmen?
(3) Finde einen Zusammenhang zwischen dem Seitenverband (der Inzidenzmatrix) von P und dem Seitenverband (der Inzidenzmatrix) von $P^\vee$.