FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
Insititut für Mathematik II
Christian Haase
Andreas Paffenholz

GITTERPOLYTOPE
Wintersemester 2005/2006

3. AUFGABENBLATT

14. NOVEMBER 2005

AUFGABE 1.

Eine Matrix $H = (h_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}(\mathbb{Z}, d)$ von vollem Rang ist in *hermitescher Normalform*, wenn H eine nichtnegative untere Dreieckmatrix ist und $h_{ii} > h_{ji}$ für alle $1 \leq i, j \leq d$ (d.h. das eindeutige größte Element jeder Spalte steht auf der Diagonalen).

Wir wollen zeigen, daß es zu jeder Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}(\mathbb{Z}, d)$ von vollem Rang eine unimodulare Transformation U gibt, so daß UA hermitesche Normalform hat.

(1) Zeige, daß sich folgende Zeilenoperationen auf einer Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}(\mathbb{Z}, d)$ von vollem Rang durch unimodulare Transformationen darstellen lassen:
   (a) Vertauschen zweier Zeilen.
   (b) Multiplikation einer Zeile mit -1.
   (c) Addition eines ganzzahligen Vielfachen einer Zeile zu einer anderen.

(2) Zeige, daß man durch Zeilentransformationen erreichen kann, daß

$$a_{11} \geq a_{21} \geq \ldots \geq a_{d1}$$

gilt. Was wissen wir dann über a_{11}?

(3) Wir können annehmen, daß nach diesem Operationen $\sum_{j=1}^{d} a_{j1}$ minimal ist. Zeige, daß dann $a_{21} = a_{31} = \ldots = a_{d1} = 0$ sein muß.

(4) Zeige, daß man A mit Zeilentransformationen in eine obere Dreiecksmatrix mit positver Diagonale überführen kann.

(5) Wir wollen noch erreichen, daß $a_{ii} > a_{ij} \geq 0$ ist für alle $1 \leq i, j \leq d$. Angenommen $a_{d,d-1} \geq a_{d-1,d-1}$. Zeige, daß sich durch Addition eines ganzzahligen Vielfachen der vorletzten Zeile zur letzten Zeile $a_{d-1,d}$ in den Bereich $[0, a_{d-1,d-1})$ bringen läßt. Welche Teile der Matrix verändern sich dadurch?

(6) Gib eine Methode an, wie sich durch geschicktes Addieren von ganzzahligen Vielfachen einer Zeile zu einer anderen die gesuchte hermitesche Normalform erreichen läßt.

Aufgabe 2.

Sei P ein Gitterpolygon mit Gitterweite $\mathrm{w}(P)$. Zeige, daß für den Level von P die Abschätzung $\mathrm{w}(P) \leq 3\ell(P)$ gilt

Hinweis: Für die Berechnung des Levels haben wir die Kette

$$P \supset P^{(1)} \supset P^{(2)} \supset \ldots \supset P^{(k)} \supset \ldots$$

eingeführt, wobei $P^{(i+1)}$ die konvexe Hülle der inneren Punkte von $P^{(i)}$ ist. Es gibt ein minimales k_0, so daß $P^{(k_0+1)}$ und alle nachfolgenden Polygone leer sind. Betrachte das Polygon $P^{(k_0)}$ und verwende Aufgabe 2(a) des vorherigen Zettels.

Aufgabe 3.

Zeige, daß $S = \operatorname{conv}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 65 \end{bmatrix}$ ein leeres 4-Simplex ist.

Berechne die Weite $\mathrm{w}(S)$ von S.