FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
Insititut für Mathematik II
Christian Haase
Andreas Paffenholz

GITTERPOLYTOPE
Wintersemester 2005/2006

4. AUFGABENBLATT

21. NOVEMBER 2005

AUFGABE 1.

Sei $\sigma := \operatorname{cone}(v_1, \dots, v_d) \subset \mathbb{R}^d$ ein simplizialer Kegel. Zeige, dass die folgenden Größen übereinstimmen:

(1) Das Volumen des von $v_1, \dots, v_d$ aufgespannten Parallelepipeds
$$\left\{\sum \lambda_i v_i \mid 0 \le \lambda_i \le 1\right\}.$$
(2) Das $(d!)$-fache der konvexen Hülle der Punkte $v_1, \dots, v_d$ und des Ursprungs.
(3) Die Anzahl der Gitterpunkte im halboffenen Parallelepiped
$$\left\{\sum \lambda_i v_i \mid 0 \le \lambda_i < 1\right\}.$$
(4) Die Determinante des Kegels.
(5) Die Ordnung der Quotientengruppe $\mathbb{Z}^d/L$, wobei
$$L := \left\{\sum n_i v_i \mid n_i \in \mathbb{Z}\right\}.$$
die von den v_i, $i = 1 \dots, d$ erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Z}^d$ ist.

AUFGABE 2.

$$\sigma_1 := \operatorname{cone}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right)$$

$$\sigma_2 := \operatorname{cone}\left(\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}\right)$$

$$\sigma_3 := \operatorname{cone}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\2\end{pmatrix}\right)$$

Bestimme eine Hilbertbasis für der Kegel $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \subset \mathbb{R}^3$.