Freie Universität Berlin
Insititut für Mathematik II
Christian Haase
Andreas Paffenholz

4. Aufgabenblatt

21. November 2005

Aufgabe 1.

Sei $\sigma := \text{cone}(v_1, \ldots, v_d) \subset \mathbb{R}^d$ ein simplizialer Kegel. Zeige, dass die folgenden Größen übereinstimmen:

(1) Das Volumen des von $v_1, \ldots, v_d$ aufgespannten Parallelepipeds

$$\left\{ \sum \lambda_i v_i \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \right\}.$$

(2) Das $(d!)$-fache der konvexen Hülle der Punkte $v_1, \ldots, v_d$ und des Ursprungs.

(3) Die Anzahl der Gitterpunkte im halboffenen Parallelepiped

$$\left\{ \sum \lambda_i v_i \mid 0 \leq \lambda_i < 1 \right\}.$$

(4) Die Determinante des Kegels.

(5) Die Ordnung der Quotientengruppe $\mathbb{Z}^d / L$, wobei

$$L := \left\{ \sum n_i v_i \mid n_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

die von den v_i, $i = 1 \ldots, d$ erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Z}^d$ ist.

Aufgabe 2.

$$\sigma_1 := \text{cone}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\sigma_2 := \text{cone}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$\sigma_3 := \text{cone}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Bestimme eine Hilbertbasis für der Kegel $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \subset \mathbb{R}^3$.