Freie Universität Berlin
Insititut für Mathematik II
Christian Haase
Andreas Paffenholz

Gitterpolytope
Wintersemester 2005/2006

5. Aufgabenblatt

5. Dezember 2005

Aufgabe 1.

Das *normalisierte Volumen* $\operatorname{vol} P$ eines Gitterpolytops P ist definiert als das $d!$-fache des euklidischen Volumens. Mit $\mathrm{w_F(P)}$ bezeichnen wir die *Facettenweite* eines Polytops P bzgl. der Facette F, also

$$\min_n(\max(\langle n, x\rangle \mid x \in P) - \min(\langle n, x\rangle \mid x \in P))$$

wobei n über alle ganzzahligen Normalenvektoren der Facette F läuft.

Sei S ein Gittersimplex. Zeige, daß für jede Facette F von S

$$\operatorname{vol}(S) = \operatorname{vol}(F)\mathrm{w_F(S)}$$

gilt.

Folgere daraus:

(1) Für jeden Gittersimplex $S = \operatorname{conv}(v_0, v_1, \ldots, v_d)$ gilt $\operatorname{vol}(S) = \det(S)$, wobei $\det(S) := \det(v_1 - v_0, \ldots, v_d - v_0)$.
(2) Für jedes Gitterpolytop P gilt $\operatorname{vol}(P) \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2.

Seien P und Q zwei Gitterpolytope, die eine unimodulare Triangluierung besitzen. Zeige, daß dann auch $P \times Q$ eine unimodulare Triangulierung hat.

Aufgabe 3.

Sei B_3 das Birkhoff-Polytop der 3×3-Permuationsmatrizen. Bestimme die Ecken und Facetten von B_3. Untersuche die Kombinatorik und zeige, daß B_3 kombinatorisch äquivalent $(\Delta \times \Delta)^*$ ist, wobei Δ ein Dreieck ist und P^* das zu P duale Polytop bezeichnet.

(Wenn $0 \in \Delta$, dann ist $(\Delta \times \Delta)^* = \Delta \diamond \Delta := \operatorname{conv}(\{0\} \times \Delta \cup \Delta \times \{0\})$.)