Freie Universität Berlin
Insititut für Mathematik II
Christian Haase
Andreas Paffenholz

Gitterpolytope
Wintersemester 2005/2006

6. Aufgabenblatt

12. Dezember 2005

Aufgabe 1.

Ein d-Polytop N heißt *Nakajima-Polytop*, wenn es

- 0-dimensional ist oder
- ein $(d-1)$-dimensionales Nakajima-Polytop $\tilde{N}$ und ein ganzzahliges lineares Funktional f mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \tilde{N}$ gibt mit

$$N := \{(x, x_{d+1}) \mid x \in \tilde{N} \text{ und } 0 \leq x_{d+1} \leq \langle f, x \rangle\}.$$

Zeige, dass Nakajima-Polytope eine unimodulare Triangulierung besitzen.

(Tip: Induktion über die Dimension.)

Aufgabe 2.

Betrachte das Produkt $P := \Delta_1 \times \Delta_2$ von zwei Simplices Δ_1 und Δ_2.

(1) Zeige, daß alle Triangulierungen von P unimodular sind.
(2) Wir konstruieren eine spezielle Triangulierung von P, die *Treppentriangulierung*.
Seien $v_0, \ldots, v_d$ die Ecken von Δ_1 und $w_0, \ldots, w_d$ die von Δ_2. Dann sind (v_i, w_j), $0 \leq i, j \leq d$ die Ecken von P. Durch

$$(v_{i_0}, w_{j_0}) \leq (v_{i_1}, w_{j_1}) \quad :\Leftrightarrow \quad i_0 \leq i_1,\ j_0 \leq j_1$$

erhalten wir eine Halbordnung auf den Ecken von P.
(a) Zeige, daß eine Kette $\{(i_0, j_0) \leq \ldots \leq (i_r, j_r)\}$ in dieser Halbordnung einer affin unabhängigen Menge entspricht, also ein Simplex aufspannt.
(b) Zeige, daß die Menge aller Simplices die von maximalen Ketten kommen eine Triangulierung von P ergeben.