FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
Institut für Mathematik II
Christian Haase
Andreas Paffenholz

GITTERPOLYTOPE
Wintersemester 2005/2006

7. AUFGABENBLATT

17. DEZEMBER 2005

AUFGABE 1.

Sei G ein (nicht notwendig zusammenhängender) gerichteter Graph mit n Knoten und e Kanten. Die Knoten sind mit $v_1, \ldots, v_n$, die Kanten mit $k_1, \ldots, k_e$ durchnumeriert.

Die *Adjazenzmatrix* von G ist eine $(n \times e)$-Matrix $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = 1$ wenn es eine Kante vom Knoten i zum Knoten j gibt, $a_{ij} = -1$ wenn es eine Kante vom Knoten j zum Knoten i gibt, und $a_{ij} = 0$ andernfalls. Zu jeder Kante k_i ist ein *Kapazitätsintervall* $[c_i, C_i] \subseteq \mathbb{R}$, zu jedem Knoten v_i ein *Bedarf* $b_i \in \mathbb{R}$ gegeben.

Ein *Fluß* auf G ist eine Abbildung $E(G) \to \mathbb{R}$, die jeder Kante k_i eine reelle Zahl (den Fluß auf der Kante) aus dem Intervall $[c_i, C_i]$ zuordnet, so daß in jedem Knoten v_i die Summe der Flüsse auf den eingehenden Kanten minus der Summe der Flüsse auf den ausgehenden Kanten b_i ist.

Das zugehörige *Flusspolytop* $F(G)$ ist die Menge aller Flüsse

$$F(G) := \{x \in \mathbb{R}^e \mid Ax = \mathbf{b},\ c_i \leq x_i \leq C_i\},$$

wobei $\mathbf{b} := (b_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ ist.

Wir wollen im Folgenden zeigen, daß Flußpolytope Gitterpolytope sind, wenn sowohl $\mathbf{b}$ als auch die Kapazitätsschranken c_i, C_i, $1 \leq i \leq e$ ganzzahlig sind.

Dafür zeigen wir zuerst, daß die Adjazenzmatrix A eine total unimodulare Matrix ist, d.h. jeder quadratische Minor sollte Determinante 0 oder ± 1 haben. Ein solcher Minor ist durch die Auswahl von r Knoten (Zeilen) v_k, $k \in I$ und von r Kanten (Zeilen) k_l, $l \in J$ gegeben. Sei $\tilde{A}$ ein solcher Minor.

(1) Zeige, daß $\tilde{A}$ Blockdiagonalform hat, wobei die Blöcke den Zusammenhangskomponenten des durch die ausgewählten Knoten und Kanten induzierten Graphen $G(\tilde{A})$ entsprechen.
(2) Zeige: Wenn die ausgewählten Kanten einen Kreis enthalten, dann ist der Kern von $\tilde{A}$ nicht leer, also $\det(\tilde{A}) = 0$.
(3) Zeige: Wenn die ausgewählten Kanten einen Weg zwischen zwei nicht-ausgewählten Knoten enthalten, dann ist der Kern von $\tilde{A}$ nicht leer, also ist $\det(\tilde{A}) = 0$.

Also können wir annehmen, daß die ausgewählten Kanten einen Baum bilden, von dem alle bis auf einen Knoten (die Wurzel) ausgewählt sind.

(4) Nun ordnen wir die Ecken und Kanten unseres Baumes neu:
   (a) Ordne die Ecken nach Abstand zur Wurzel.
   (b) Ordne die Kanten nach ihrem maximalen Endpunkt

   Zeige, daß dies eine Dreiecksmatrix ergibt. Was folgt damit über ihre Determinante?
(5) Folgere nun, daß A total unimodular ist.

Jetzt müssen wir zeigen, daß daraus folgt, daß $F(G)$ ein Gitterpolytop ist.

(6) Zeige, daß jeder quadratische Minor von A eine ganzzahlige Inverse hat (*Tip: Cramersche Regel*).
(7) Zeige, daß die Ecken des Flußpolytops Punkte sind, die einige der Kapazitätsschranken mit Gleichheit erfüllen.
(8) Folgere, daß die Ecken des Flußpolytops ganzzahlig sind.