FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
Institut für Mathematik II
Christian Haase
Andreas Paffenholz

GITTERPOLYTOPE
Wintersemester 2005/2006

11. AUFGABENBLATT

30. JANUAR 2006

AUFGABE 1.

Beweise folgende Verallgemeinerung des Approximationssatzes aus der Vorlesung:

Seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ reelle Zahen.

Dann gibt es unendlich viele Tupel $(q, p_1, \ldots, p_d)$ mit $q > 0$ so daß

$$|q\alpha_i - p_i| \leq q^{-\frac{1}{d}}. \qquad (*)$$

Tip: Zeige dafür zuerst, daß es zu d Vektoren $\eta_1, \ldots, \eta_d \in (\mathbb{R}^d)^*$ mit $\det \eta \neq 0$ (wobei η die Matrix $(\eta_1, \ldots, \eta_d)$ ist) und d reellen Zahlen $t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{R}$ mit $\prod_{i=1}^d t_i \geq \det \eta$ einen Punkt $z \in \mathbb{Z}^d$ gibt mit $|\eta_i(z)| \leq t_i$ für alle $1 \leq i \leq d$.
Stelle die Menge der $x \in \mathbb{R}^d$, die (*) erfüllen, geeignet durch Linearformen dar.

AUFGABE 2.

Sei Λ ein Gitter in $\mathbb{R}^d$ und M eine zentralsymmetrische konvexe Menge mit $\operatorname{vol} M < 2^d m \det \Lambda$ für eine positive ganze Zahl m. Zeige daß M mindestens m Paare von Gitterpunkten $\pm\lambda_i$ mit $\lambda_i \neq 0$ enthält.

Tip: Zeige zuerst, daß es zu einer Menge M mit $\operatorname{vol} M > m \det \Lambda$, $m \in \mathbb{N}$, $m + 1$ verschiedene Punkte $p_1, \ldots, p_{m+1}$ gibt, so daß $p_i - p_j \in \Lambda$ für alle $1 \leq i, j \leq m+1$.

AUFGABE 3.

Sei p eine Primzahl der Form $4n + 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir wollen zeigen, daß p als Summe von zwei Quadraten dargestellt werden kann.

(1) Zeige, daß es eine ganze Zahl α gibt mit $\alpha^2 \equiv -1 \mod p$
(Tip: Kleiner Satz von Fermat).
(2) Betrachte in $\mathbb{R}^2$ das von den Vektoren $(0, p)$ und $(1, \alpha)$ erzeugte Gitter.
Zeige, daß der Ball $B_r := \{(x, y) \mid x^2 + x^2 \leq r\}$ für ein geeignetes $r > 0$ einen Gitterpunkt (a, b) mit $0 < a^2 + b^2 < 2p$ enthält.
(3) Folgere daraus die Darstellung von p als Summe zweier Quadrate.